

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© **studiVEMINT Team - Paderborn**

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

go.upb.de/studivemint

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Ergänzungen

Aufgabe 18:

Das untere Bild zeigt eine dreidimensionale Darstellung einer anderen Formel.

a) Finden Sie eine Gleichung, die durch dieses Bild dargestellt werden kann.

b) Können Sie die einzelnen Summanden in der ausmultiplizierten Form den einzelnen Teilen zuordnen?

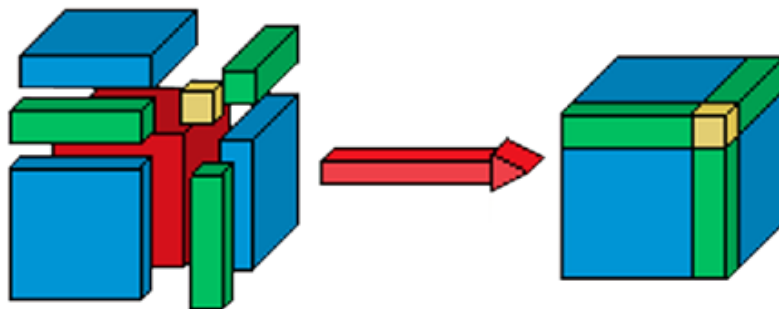


Bild 3

Lösung:

zu a.)

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + b^3$$

zu b.) Wenn a das längere Seitenstück und b das kürzere ist, dann entspricht

- a^3 dem roten inneren Würfel,
- a^2b den drei blauen Quadern,
- ab^2 den drei grünen Quadern und
- b^3 dem gelben Würfel.

Wenn b das längere und a das kürzere Seitenstück ist, dann entsprechend andersherum.

Aufgabe 19:**Pascalsches Dreieck und die binomischen Formeln**

- Multiplizieren Sie folgende Terme aus: $(a + b)^3$, $(a + b)^4$, $(a + b)^5$ und $(a + b)^6$. Können Sie einen Zusammenhang mit dem Pascal'schen Dreieck erkennen?

				1																
				1		1														
				1		2		1												
				1		3		3		1										
				1		4		6		4		1								
				1		5		10		10		5		1						
				1		6		15		20		15		6		1				
				1		7		21		35		35		21		7		1		
				1		8		28		56		70		56		28		8		1

Bild 4 Das Pascal'sche Dreieck. Eine Zeile entsteht indem Sie jeweils zwei Zahlen in der vorherigen Zeile addieren und die Zahlen 1 am Rand ergänzen.

Lösung:

Es ergibt sich sortiert

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Zusammenhang zum Pascalschen Dreieck: Schreibt man die einzelnen Summanden wie hier geschehen mit absteigenden Potenzen von a auf, so lassen sich die Zahlen vor den Variablen (die so genannten „Koeffizienten“) direkt aus dem Pascalschen Dreieck ablesen: Die Koeffizienten für $(a + b)^5$ lassen sich beispielsweise in der sechsten Zeile finden. Außerdem beträgt in der ausmultiplizierten Form von $(a + b)^n$ die Summe der Exponenten von a und b bei den einzelnen Summanden stets n .

- Geben Sie für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ ein System zur Entwicklung der ausmultiplizierten Form von $(a + b)^n$ an und wenden Sie es auf den Term $(a + b)^8$ an (ohne zu rechnen)!

Lösung:

Man schreibt die a -Potenzen absteigend und die b -Potenzen aufsteigend, sodass die Summe der Exponenten von a und b bei den einzelnen Summanden stets n ergibt. Die Koeffizienten für $(a+b)^n$ lassen sich in der $n+1$ Zeile des Pascalschen Dreieck finden.

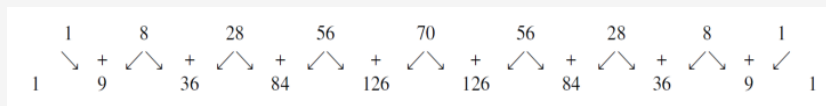
Für $(a+b)^8$ ergibt sich analog aus der neunten Zeile:

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8.$$

- Multiplizieren Sie auch $(a+b)^9$ aus.

Lösung:

Für $(a+b)^9$ benötigt man zunächst die 10. Zeile des Pascal'schen Dreiecks. Betrachtet man die einzelnen Zahlen im Dreieck noch einmal genauer, so stellt man fest, dass sich diese stets durch Addition der beiden darüber stehenden Zahlen berechnen lassen.

**Bild 5**

Insgesamt folgt damit:

$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$$

- In ganz ähnlicher Weise kann man Terme der Form $(a-b)^n$ betrachten. Bestimmen Sie für kleine $n \in \mathbb{N}$ die ausmultiplizierte Form. Was fällt Ihnen auf? Können Sie wieder ein System für die Entwicklung der ausmultiplizierten Form angeben?

Lösung:

Analoges gilt für $(a-b)^n$, nur muss hier zusätzlich auf die Vorzeichen geachtet werden:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\(a-b)^4 &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\(a-b)^5 &= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5\end{aligned}$$

Offensichtlich lassen sich auch hier die Koeffizienten aus dem Pascal'schen Dreieck ablesen, nur ist der erste Summand stets positiv, der zweite stets negativ, der dritte wieder positiv usw.

