

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© **studiVEMINT Team - Paderborn**

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

go.upb.de/studivemint

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Anwendung

Aufgabe 13:

(Plattenleger - Problem)

Ein Plattenleger macht eine interessante Entdeckung: Jedes Mal, wenn er eine quadratische Fläche auslegen soll, bei der an jeder Seite eine ungerade Anzahl Platten liegt, bleibt ausgerechnet stets genau ein Feld frei, wenn er die Kacheln bei seinem Händler in der 8er - Packung kauft.

Finden Sie eine Erklärung für dieses Phänomen!

Lösung:

Alle ungeraden Zahlen lassen sich durch den Term $2n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellen. Damit ist die Anzahl der zu verlegenden Platten bei einer quadratischen Fläche mit ungerader Plattenzahl an jeder Seite genau $(2n - 1)^2$.

Mit Hilfe der binomischen Formel ergibt sich hieraus: $(2n - 1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$. Da allerdings $4n^2 - 4n = 4n(n - 1)$ ist, wird für alle $n \in \mathbb{N}$ der Faktor 4 hier stets mit einer geraden Zahl multipliziert, da ja entweder n oder $n - 1$ gerade ist. Das Produkt aus 4 und einer geraden Zahl ergibt jedoch stets ein Vielfaches von 8, sodass auch $4n^2 - 4n$ stets ein Vielfaches von 8 ist.

Da der Plattenleger jedoch stets $4n^2 - 4n + 1$ Platten braucht, hat er immer eine Platte zu wenig bzw. 7 zu viel gekauft!

Verkürztes Ausmultiplizieren

Aufgabe 14:

Multiplizieren Sie folgenden quadratischen Ausdruck aus:

$$(-3x^2 + 7a)^2.$$

Man erhält:

Lösung:

$$\begin{aligned} & (-3x^2 + 7a)^2 \\ &= (-3x^2)^2 + 2(-3x^2)(7a) + (7a)^2 \\ &= 9x^4 - 42ax^2 + 49a^2 \end{aligned}$$

Die obigen Gleichungen suggerieren, dass die binomischen Formeln uns nur einige Rechenschritte ersparen. Aber sie helfen unter anderem auch beim Quadrieren bestimmter Zahlen.

Faktorisierung

Die eigentliche Stärke der binomischen Formeln tritt erst zutage, wenn man sie „rückwärts“ anwendet. Betrachten wir hierzu folgendes Beispiel.

Beispiel 2:

Vereinfachen Sie folgenden Term:

$$\frac{9x^2 - 12x + 4}{6x - 4}$$

Dabei darf der Nenner nicht den Wert Null annehmen, also muss $x \neq \frac{2}{3}$ sein.

Kürzen ist zunächst nicht möglich und eine Polynomdivision wäre aufwändig. Einen schnelleren Lösungsweg bietet hier die Anwendung einer binomischen Formel. Der Term im Zähler kann als $(3x - 2)^2$ geschrieben werden:

$$\frac{9x^2 - 12x + 4}{6x - 4} = \frac{(3x - 2)^2}{6x - 4}$$

Zusätzlich kann man im Nenner den Faktor 2 ausklammern, sodass dort ebenfalls der Term $3x - 2$ steht:

$$\frac{(3x - 2)^2}{6x - 4} = \frac{(3x - 2)^2}{2(3x - 2)}$$

Nun kann man den Term $3x - 2$ aus Zähler und Nenner herauskürzen und erhält:

$$\frac{(3x - 2)^2}{2(3x - 2)} = \frac{3x - 2}{2}$$

Diesen Bruch kann man auch umschreiben, sodass das Ergebnis übersichtlicher wird:

$$\frac{3x - 2}{2} = \frac{3}{2}x - 1$$

Mit Hilfe der zweiten binomischen Formel wurde also der Bruch $\frac{9x^2 - 12x + 4}{6x - 4}$ zu $\frac{3}{2}x - 1$ vereinfacht. Zu beachten ist hier, dass der Wert $x = \frac{2}{3}$ nach wie vor ausgeschlossen ist, da der Bruch sonst nicht definiert ist (da der Nenner sonst den Wert Null annimmt).

Aufgabe 15:

Vereinfachen Sie durch Faktorisieren und Kürzen für $d \in \mathbb{R}$:

$$\frac{9 + 12d^2 + 4d^4}{3 + 2d^2} = \boxed{?}$$

Lösung:

Der Term im Zähler lässt sich wegen

$$\begin{aligned} (3 + 2d^2)^2 &= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot (2d^2) + (2d^2)^2 \\ &= 9 + 12d^2 + 4d^4 \end{aligned}$$

faktorisieren:

$$\frac{9 + 12d^2 + 4d^4}{3 + 2d^2} = \frac{(3 + 2d^2)^2}{3 + 2d^2}$$

Jetzt kann man kürzen und erhält:

$$\frac{(3 + 2d^2)^2}{3 + 2d^2} = \frac{3 + 2d^2}{1} = 3 + 2d^2$$

Aufgabe 16:

Vereinfachen Sie durch Faktorisieren und Kürzen:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab}$$

Überlegen Sie zunächst, für welche a und b der Nenner Null ist. Welche Werte für a und b müssen also ausgeschlossen werden?

Lösung:

Der Nenner des Terms darf nicht Null werden. Wegen $a^2 - ab = a(a - b)$ müssen die beiden Fälle $a = 0$ und $a = b$ ausgeschlossen werden.

Dann ergibt sich:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab} = \frac{(a - b)(a + b)}{a(a - b)} = \frac{a + b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

Aufgabe 17:

Fassen Sie folgende Summe von Brüchen zu einem Bruch zusammen:

$$\frac{a}{a + b} + \frac{b}{a - b} + \frac{2ab}{b^2 - a^2}$$

Welche Werte von a und b müssen ausgeschlossen werden?

Lösung:

Ausgeschlossen werden muss eine Null im Nenner. Demnach muss $a + b \neq 0$ und somit $a \neq -b$ gelten. Des Weiteren muss auch $a - b \neq 0$ sein, sodass auch $a \neq b$ vorausgesetzt werden muss. Der Nenner des dritten Terms führt zu keinen weiteren Ausnahmen, da $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$ gilt und dieses Produkt nur dann Null wird, wenn einer der beiden bereits betrachteten Fälle eintritt. Somit muss insgesamt nur $a = -b$ und $a = b$ ausgeschlossen werden.

Beim Zusammenfassen ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
 & \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{2ab}{b^2-a^2} \\
 = & \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)} + \frac{2ab}{(b^2-a^2)} \\
 = & \frac{a(a-b)}{a^2-b^2} + \frac{b(a+b)}{a^2-b^2} + \frac{2ab(-1)}{(b^2-a^2)(-1)} \\
 = & \frac{a^2-ab}{a^2-b^2} + \frac{ba+b^2}{a^2-b^2} - \frac{2ab}{a^2-b^2} \\
 = & \frac{a^2-ab+ba+b^2-2ab}{a^2-b^2} \\
 = & \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} \\
 = & \frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} \\
 = & \frac{a-b}{a+b}
 \end{aligned}$$

Hinweis: Beim Lösen von quadratischen Gleichungen spielen abermals die binomischen Formeln in rückwärtiger Anwendung eine wichtige Rolle.