studiVEMINT-Kurs Mathematik

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

go.upb.de/studivemint

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Aufgaben

Für die folgenden Aufgaben gilt, dass alle Variablen für reelle Zahlen stehen, wenn nichts anderes gesagt wird.

Aufgabe 2:
Kreuzen Sie die korrekten Gleichungen an. Korrigieren Sie gegebenenfalls.

- ☐ $(a-b)^2 = a^2 - b^2$
- ☐ $(r+s)^2 = r + 2rs + s$
- ☐ $(f-k)^2 = f^2 - k^2 + 2fk$
- ☐ $u^2 - v^2 = (v-u)(u+v)$
- ☐ $(o-c)^2 = o^2 - oc + c^2$
- ☐ $16 + 8a + a^2 = (4a)^2$
- ☐ $p^2 - p2q + q^2 = (p-q)^2$
- ☐ $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot 2ab \cdot b^2$
- ☐ $(w+i)(-i+w) = w^2 - i^2$
- ☐ $z^2 + j^2 + zj2 = (z+j)^2$
- ☐ $(8a^2 + 5b^2)^2 = 64a^2 + 80a^2b^2 + 25b^4$
- ☐ $(24h - 12b)^2 = 576h^2 - 48hb + 144b^2$
- ☐ $(c+d)^3 = c^3 + d^3$

Lösung:

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und nicht $a^2 - b^2$.
$(r+s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$ auch in diesem Fall war die Umformung falsch.
$(f-k)^2 = f^2 + k^2 - 2fk$ hier lag ein Vorzeichenfehler vor.
$u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$ und nicht $(v-u)(u+v)$.
$(o-c)^2 = o^2 - 2oc + c^2$ und nicht $o^2 - oc + c^2$.
$16 + 8a + a^2$ kann zu $(4+a)^2$ vereinfacht werden, die vorliegende Lösung ist hingegen falsch.
$p^2 - p2q + q^2 = p^2 - 2pq + q^2 = (p-q)^2$ ist korrekt.
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ Die oben angegebene Gleichung war also falsch.
$(w+i)(-i+w) = (w+i)(w-i) = w^2 - i^2$ ist richtig.
$z^2 + j^2 + zj2 = z^2 + 2jz + j^2 = (z+j)^2$ auch dies ist richtig.
$(8a^2 + 5b^2)^2 = 64a^4 + 80a^2b^2 + 25b^4$. Bei der vorliegenden Lösung wurde vergessen, a^2 zu a^4 zu quadrieren.
$(24h - 12b)^2 = 576h^2 - 576hb + 144b^2$. Es wurde oben also vergessen, im mittleren Term mit 12 zu multiplizieren.

$$\begin{aligned} (c+d)^3 &= (c+d)^2 \cdot (c+d) \\ &= (c^2 + 2cd + d^2)(c+d) \\ &= c^3 + c^2d + 2cd^2 + 2c^2d + d^2c + d^3 \\ &= c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \\ \text{und nicht} \quad & c^3 + d^3 . \end{aligned}$$

Aufgabe 3:
Veranschaulichen Sie die folgenden Terme geometrisch. Ordnen Sie auch die einzelnen Summanden (und Subtrahenden) in der ausmultiplizierten Form den jeweiligen Teilflächen zu!

- $(3a + 4b)^2$ für $a, b > 0$

Lösung:

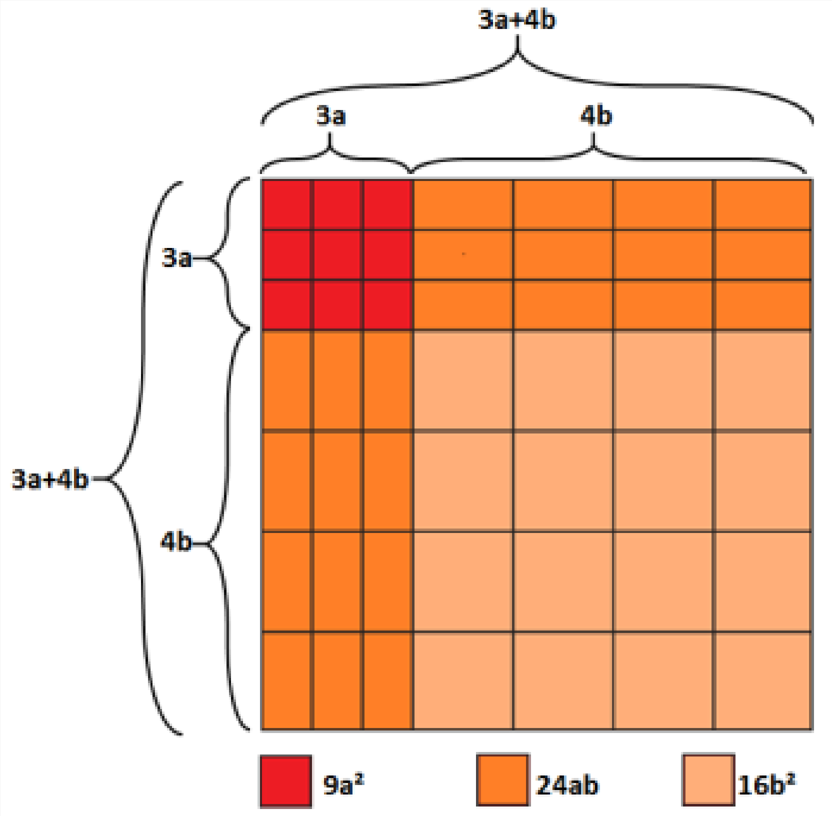

Bild 1 Geometrische Veranschaulichung von $(3a + 4b)^2$; mit der Annahme $b > a$

- $(4c - a)^2$ für $4c > a > 0$

Lösung:

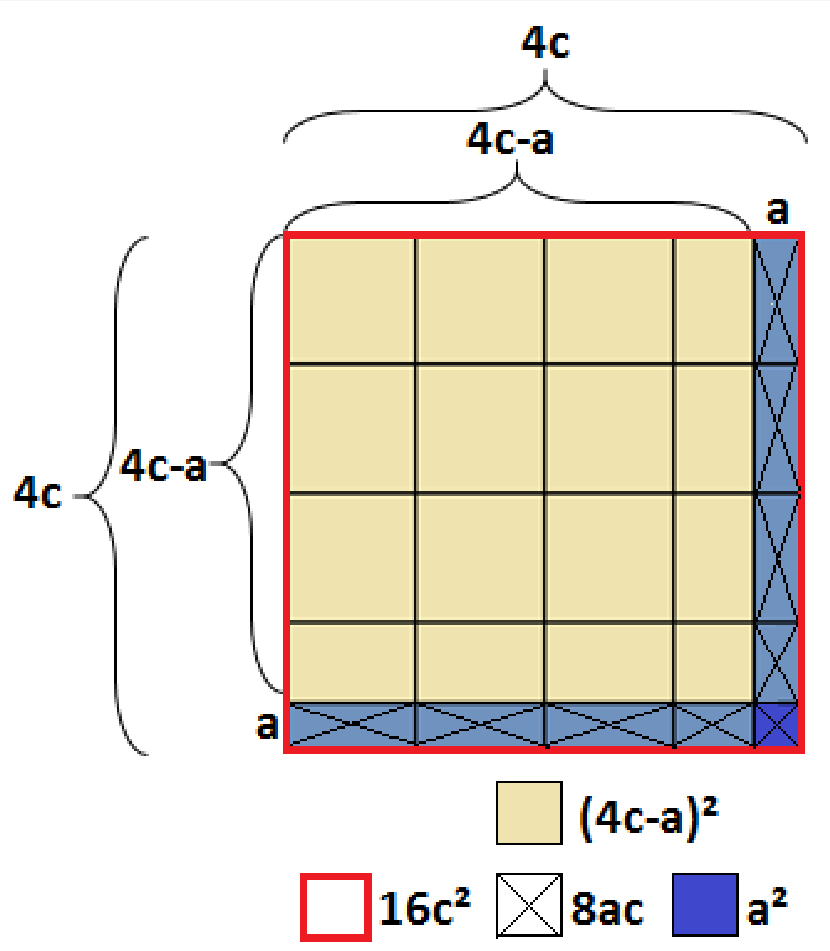

Bild 2 Geometrische Veranschaulichung von $(4c-a)^2$; mit der Annahme $c > a$

Aufgabe 4:
Vervollständigen Sie so, dass die sich ergebenden Gleichungen richtig sind!

- $(a-2b)^2 = \boxed{\ ?\ } -4ab+ \boxed{\ ?\ }\ b^2$

Lösung:
Mit der 2. Binomischen Formel ergibt sich:

$(a-2b)^2 = a^2 -4ab+ 4\ b^2$

- $(y- \boxed{\ ?\ })^2 = y^2 \boxed{\ ?\ } +9z^2$

Lösung:
Mit der 2. Binomischen Formel ergibt sich:

$(y- 3z)^2 = y^2 -6yz +9z^2$

- $(2 \square a)(2 \square a) = 4 \square a^2$
Hier existieren mehrere korrekte Lösungen. Wie lauten sie?

Lösung:

Mit der 3. Binomischen Formel ergibt sich:

$(2 + a)(2 - a) = 4 - a^2$
beziehungsweise
$(2 - a)(2 + a) = 4 - a^2$
Eine weitere richtige Lösung ist:
$(2 \cdot a)(2 \cdot a) = 4 \cdot a^2$

Aufgabe 5:
Ist die folgende Gleichung korrekt? Wenn nicht, suchen Sie ein Zahlenbeispiel, das diese Gleichung widerlegt!
$(a + b)^3 = a^3 + 3ab + b^3$.

Lösung:

Die Gleichung ist falsch.

Ein mögliches Gegenbeispiel erhält man, indem man für $a = 2$ und $b = 3$ einsetzt:
$(2+3)^3 = 5^3 = 125$ aber $2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3^3 = 8 + 18 + 27 = 53$ Weitere Gegenbeispiele findet man, indem man andere Zahlen für a und b einsetzt.

Die obige Gleichung müsste korrekt lauten:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2 \cdot (a+b) \\
&= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) \\
&= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot a + (a^2 + 2ab + b^2) \cdot b \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}$$

Aufgabe 6:
Vereinfachen Sie:

$$(5a + 4)^2 - (3a - 5)^2 + 4(a + 3)(a - 3) .$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
& (5a+4)^2 - (3a-5)^2 + 4(a+3)(a-3) \\
=\; & 25a^2 + 2 \cdot 5a \cdot 4 + 16 - (9a^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5 + 25) + 4(a^2 - 9) \\
=\; & 25a^2 + 40a + 16 - 9a^2 + 30a - 25 + 4a^2 - 36 \\
=\; & 20a^2 + 70a - 45
\end{aligned}$$

Aufgabe 7:
Wandeln Sie folgende Summen in Produkte um:

- $25 + 4z^2 + 20z$

Lösung:

$$\begin{aligned} 25 + 4z^2 + 20z &= (2z)^2 + 2 \cdot 2z \cdot 5 + 5^2 \\ &= (2z+5)^2 \end{aligned}$$

- $-x^4y^2 + 9y^2$

Lösung:

$$\begin{aligned} -x^4y^2 + 9y^2 &= (3y)^2 - (x^2y)^2 \\ &= (3y - x^2y)(3y + x^2y) \\ &= y^2 \cdot (3 - x^2)(3 + x^2) \end{aligned}$$

- $-4m^2b + 2m^3 + 2mb^2$

Lösung:

$$\begin{aligned} & -4m^2b + 2m^3 + 2mb^2 \\ = {} & 2m(m^2 - 2mb + b^2) \\ = {} & 2m(m-b)^2 \end{aligned}$$

Beispiel 1:
Mit den binomischen Formeln berechnet man:

$$1,001^2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} 1,001^2 &= \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^2 \\ &= 1 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1000} + \left(\frac{1}{1000}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{2}{1000} + \frac{1}{1000000} = 1 + 0,002 + 0,000001 \\ &= 1,002001\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 8:
Berechnen Sie auf ähnliche Weise:

$$0,998^2$$

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, wie die Zahl 0, 998 geschickt zerlegt werden kann.

$0,998^2 = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

Zunächst teilen wir die Zahl geschickt in eine Summe auf:

$$0{,}998 = 1 - 0{,}002 = 1 - \frac{2}{1000}\,.$$

Dann rechnen wir:

$$\begin{aligned} 0{,}998^2 &= \left(1 - \frac{2}{1000}\right)^2 \\ &= 1^2 - 2\cdot 1 \cdot \frac{2}{1000} + \left(\frac{2}{1000}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{4}{1000} + \frac{4}{1\,000\,000} \\ &= 1 - 0{,}004 + 0{,}000004 \\ &= 0{,}996004 \end{aligned}$$

Aufgabe 9:
Berechnen Sie das exakte Ergebnis mit den binomischen Formeln:

$1{,}002^2 = \boxed{\ ?\ }$

$0{,}999^2 = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

$$\begin{aligned} 1{,}002^2 &= (1 + 0{,}002)^2 \\ &= 1^2 + 2\cdot 0{,}002 + 0{,}002^2 \\ &= 1 + 0{,}004 + 0{,}000004 \\ &= 1{,}004004 \\ 0{,}999^2 &= (1 - 0{,}001)^2 \\ &= 1^2 - 2\cdot 0{,}001 + 0{,}001^2 \\ &= 1 - 0{,}002 + 0{,}000001 \\ &= 0{,}998001 \end{aligned}$$

Aufgabe 10:
Auch mit der dritten binomischen Formel lassen sich scheinbar schwere Multiplikationen leicht im Kopf berechnen. Lösen Sie die folgenden Aufgaben im Kopf und schreiben Sie vorher auf, wie Sie die Rechnung modifizieren müssen, um die dritte binomische Formel anwenden zu können.

$71 \cdot 69 = \boxed{\;?\;}$

Lösung:

$$\begin{aligned} 71 \cdot 69 &= (70+1)\cdot(70-1) \\ &= 4900-1 \\ &= 4899 \end{aligned}$$

$79 \cdot 81 = \boxed{\;?\;}$

Lösung:

$$\begin{aligned} 79 \cdot 81 &= (80-1)\cdot(80+1) \\ &= 6400-1 \\ &= 6399 \end{aligned}$$

$48 \cdot 52 = \boxed{\;?\;}$

Lösung:

$$\begin{aligned} 48 \cdot 52 &= (50-2)\cdot(50+2) \\ &= 2500-4 \\ &= 2496 \end{aligned}$$

$1001 \cdot 999 = \boxed{\;?\;}$

Lösung:

$$\begin{aligned} 1001 \cdot 999 &= (1000+1)\cdot(1000-1) \\ &= 1000000-1 \\ &= 999999 \end{aligned}$$

$205 \cdot 195 = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

$$\begin{aligned} 205 \cdot 195 &= (200+5)(200-5) \\ &= 200^2 - 5^2 \\ &= 40000 - 25 \\ &= 39975 \end{aligned}$$

Aufgabe 11:
Berechnen Sie im Kopf

$44^2 - 43^2 = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

$$\begin{aligned} 44^2 - 43^2 &= (44-43) \cdot (44+43) \\ &= 1 \cdot 87 = 87 \end{aligned}$$

$1002^2 - 1001^2 = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

$$\begin{aligned} 1002^2 - 1001^2 &= (1002+1001) \cdot (1002-1001) \\ &= 2003 \cdot 1 = 2003 \end{aligned}$$

Aufgabe 12:
Suchen Sie bei den folgenden Umformungen nach den Fehlern und geben Sie mögliche Ursachen an.

$(3x+5y)^2 = 3x^2 + 30xy + 5y^2$

Lösung:

Falsches Potenzieren: Es wurde vergessen, die einzelnen Terme ($3x$ bzw. $5y$) komplett zu quadrieren.

Korrekt wäre:

$$\begin{aligned} (3x+5y)^2 &= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 \\ &= 9x^2 + 30xy + 25y^2 \end{aligned}$$

$(1 - m)(m + 1) = m^2 + 1$

Lösung:
Vorzeichenfehler: Vor m^2 fehlt das Minuszeichen.

Korrekt wäre:

$$\begin{aligned}(1 - m)(m + 1) &= (1 - m)(1 + m) \\ &= 1^2 - m^2 \\ &= -m^2 + 1\end{aligned}$$

$(8z + 9w)^2 = 64z^2 + 81w^2$

Lösung:
Missachtung der Termstruktur: Die Klammer wurde einfach aufgelöst und der Exponent auf die Summanden verteilt. Hier hätte die erste binomische Formel angewandt werden müssen.

Korrekt wäre:

$$\begin{aligned}(8z + 9w)^2 &= (8z)^2 + 2 \cdot 8z \cdot 9w + (9w)^2 \\ &= 64z^2 + 144wz + 81w^2\end{aligned}$$

$(2t - 4)(9t + 5) = 18t^2 - 46t - 20$

Lösung:
Missachtung der Voraussetzungen: Bei diesem Beispiel ist die Anwendung einer binomischen Formel nicht möglich.

Korrekt wäre:

$$\begin{aligned}& (2t - 4)(9t + 5) \\ = \; & 2t \cdot 9t + 2t \cdot 5 + (-4) \cdot 9t + (-4) \cdot 5 \\ = \; & 18t^2 - 26t - 20\end{aligned}$$

$(9p - 7s)(9p + 7s) = 81p - 49s$

Lösung:
Hier wurde vergessen, die Variablen p und s zu quadrieren.

Korrekt wäre: $(9p - 7s)(9p + 7s)^2 = (9p)^2 - (7s)^2 = 81p^2 - 49s^2$.

$(-9 - i)(6 - i) = -i^2 + 3i + 54$

Lösung:

Mehrere Fehler: Eine binomische Formel kann hier nicht angewandt werden, da hierzu die Voraussetzungen fehlen. Zudem wurden die binomischen Formeln falsch angewandt.

Korrekt wäre:

$$\begin{aligned} & (-9-i)(6-i) \\ = \; & (-9)\cdot 6 + (-9)\cdot(-i) + (-i)\cdot 6 + (-i)\cdot(-i) \\ = \; & -54 + 9i - 6i + i^2 \\ = \; & i^2 + 3i - 54 \end{aligned}$$

$(-d+e)^2 = -d^2 - 2de + e^2$

Lösung:

Vorzeichenfehler: Das Minuszeichen vor d^2 ist falsch, da $(-d)^2 = d^2$. Es wurde also falsch quadriert.

Korrekt wäre:

$$\begin{aligned} (-d+e)^2 &= (-d)^2 + 2\cdot(-d)\cdot e + (e)^2 \\ &= d^2 - 2de + e^2 \end{aligned}$$