studiVEMINT-Kurs Mathematik

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

go.upb.de/studivemint

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Hinführung

Anhand der folgenden Aufgaben können Sie die binomischen Formeln auf zwei verschiedene Weisen entdecken: auf dem algebraischen Weg und auf dem geometrischen Weg.

Der algebraische Weg

Aufgabe 1:
1.) Multiplizieren Sie nacheinander schrittweise folgende Terme aus und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich! Alle Variablen stellen reelle Zahlen dar.

$$(a+b)(c+d) \qquad (u+d)(u+t) \qquad (h+g)(h+g)$$

$$(f+k)^2 \qquad (w+b)(b-w) \qquad (e+i)(e-i)$$

$$(z-v)(v-z) \qquad (s-l)(s-l) \qquad (s-l)^2$$

Für bestimmte Gleichungen gibt es Regeln, die Ihnen einige Zwischenschritte und damit Zeit und Arbeit sparen. Für welche dieser Umformungen kennen Sie Regeln und welche sind dies?

Lösung:

$$\begin{aligned}
(a+b)(c+d) &= ac+bc+ad+bd \\
(u+d)(u+t) &= u^2+du+ut+dt \\
(h+g)(h+g) &= h^2+hg+gh+g^2 \\
&= h^2+2hg+g^2 \\
(f+k)^2 &= (f+k)\cdot(f+k) \\
&= f^2+kf+fk+k^2 \\
&= f^2+2fk+k^2 \\
(w+b)(b-w) &= wb+b^2-w^2-bw \\
&= b^2-w^2 \\
(e+i)(e-i) &= e^2+ie-ei-i^2 \\
&= e^2-i^2 \\
(z-v)(v-z) &= zv-v^2-z^2+zv \\
&= -v^2+2zv-z^2 \\
(s-l)(s-l) &= s^2-ls-sl+l^2 \\
&= s^2-2sl+l^2 \\
(s-l)^2 &= (s-l)\cdot(s-l) \\
&= s^2-2sl+l^2
\end{aligned}$$

Fazit:
Sind die Terme in einer bestimmten Form gegeben, so können wir diese direkt mithilfe der drei **binomischen Formeln** ohne Zwischenschritte umwandeln. Die drei Formeln lauten:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 \\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2
\end{aligned}$$

2.) Bei manchen mathematischen Berechnungen müssen Summen in Produkte umgewandelt werden (Faktorisieren). Ein Schüler der 8. Klasse konnte den Term c^2-h^2 direkt in ein Produkt aus zwei Termen umwandeln.
Können Sie das auch? Begründen Sie, wieso Ihr Ergebnis richtig ist.
Überlegen Sie, bei welchen anderen Termen eine Faktorisierung „auf den ersten Blick“ möglich ist!

Lösung:
Da mit $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ natürlich auch $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ gilt, lassen sich die binomischen Formeln nicht nur zum Ausmultiplizieren, sondern auch zur Faktorisierung verwenden.
Somit gilt aufgrund der dritten binomischen Formel auch:

$$c^2-h^2 = (c+h)(c-h)\,.$$

3.) Wie lauten also die drei Gleichungen, die sich in den obigen Teilaufgaben als nützlich erwiesen haben? Ergänzen Sie!

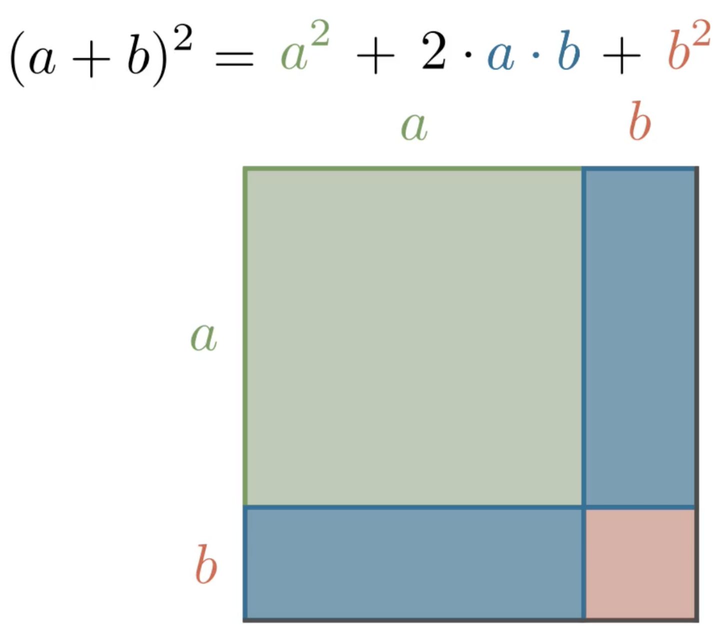
$(a + b)^2 = \boxed{\ ?\ }$
$(a - b)^2 = \boxed{\ ?\ }$
$(a + b)(a - b) = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:
Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2a \cdot b + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2a \cdot b + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

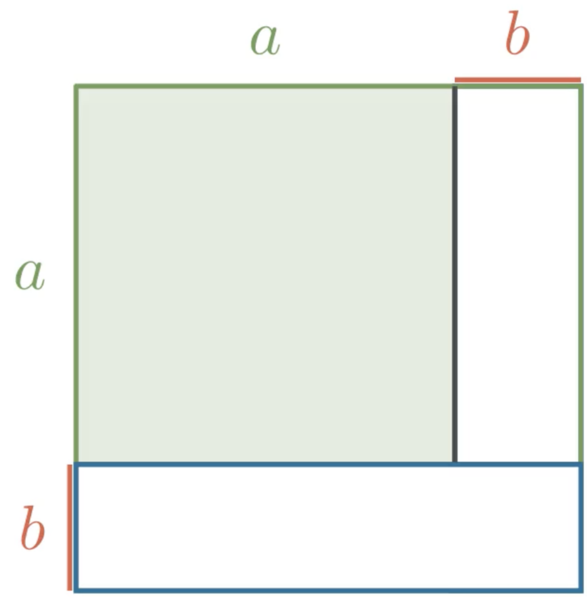
Bei der Eingabe ist zu beachten, dass die einzelnen Variablen a und b nur dann korrekt erkannt werden, wenn sie durch ein Rechensymbol (hier das Multiplikationszeichen) voneinander getrennt werden.

Der geometrische Weg



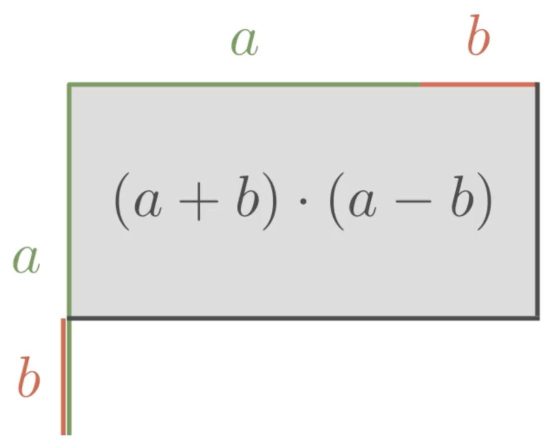
Video 1 *(nur in digitaler Version)* Die geometrische Herleitung der ersten binomischen Formel.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



Video 2 *(nur in digitaler Version)* Die geometrische Herleitung der zweiten binomischen Formel.

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$



Video 3 *(nur in digitaler Version)* Die geometrische Herleitung der dritten binomischen Formel.