studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

go.upb.de/studivemint

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

LE 4 - Terme und Gleichungen

4.1 Binomische Formeln

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht

- Genetische Hinführung auf algebraischem und geometrischem Weg
- Algebraische und geometrische Begründung und Visualisierung aller Formeln
- Anwendungsbereiche der binomischen Formeln einschließlich interaktiver Aufgaben
- Aufgabenstellungen mit weiterführenden Inhalten

Hinführung

Anhand der folgenden Aufgaben können Sie die binomischen Formeln auf zwei verschiedene Weisen entdecken: auf dem algebraischen Weg und auf dem geometrischen Weg.

Der algebraische Weg

Aufgabe 1:
1.) Multiplizieren Sie nacheinander schrittweise folgende Terme aus und vereinfachen Sie diese so weit wie möglich! Alle Variablen stellen reelle Zahlen dar.

$$\begin{array}{lll} (a+b)(c+d) & (u+d)(u+t) & (h+g)(h+g) \\ (f+k)^2 & (w+b)(b-w) & (e+i)(e-i) \\ (z-v)(v-z) & (s-l)(s-l) & (s-l)^2 \end{array}$$

Für bestimmte Gleichungen gibt es Regeln, die Ihnen einige Zwischenschritte und damit Zeit und Arbeit sparen. Für welche dieser Umformungen kennen Sie Regeln und welche sind dies?

Lösung:

$$\begin{aligned}
(a+b)(c+d) &= ac+bc+ad+bd\\
(u+d)(u+t) &= u^2+du+ut+dt\\
(h+g)(h+g) &= h^2+hg+gh+g^2\\
&= h^2+2hg+g^2\\
(f+k)^2 &= (f+k)\cdot(f+k)\\
&= f^2+kf+fk+k^2\\
&= f^2+2fk+k^2\\
(w+b)(b-w) &= wb+b^2-w^2-bw\\
&= b^2-w^2\\
(e+i)(e-i) &= e^2+ie-ei-i^2\\
&= e^2-i^2\\
(z-v)(v-z) &= zv-v^2-z^2+zv\\
&= -v^2+2zv-z^2\\
(s-l)(s-l) &= s^2-ls-sl+l^2\\
&= s^2-2sl+l^2\\
(s-l)^2 &= (s-l)\cdot(s-l)\\
&= s^2-2sl+l^2
\end{aligned}$$

Fazit:
Sind die Terme in einer bestimmten Form gegeben, so können wir diese direkt mithilfe der drei **binomischen Formeln** ohne Zwischenschritte umwandeln. Die drei Formeln lauten:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2
\end{aligned}$$

2.) Bei manchen mathematischen Berechnungen müssen Summen in Produkte umgewandelt werden (Faktorisieren). Ein Schüler der 8. Klasse konnte den Term c^2-h^2 direkt in ein Produkt aus zwei Termen umwandeln.
Können Sie das auch? Begründen Sie, wieso Ihr Ergebnis richtig ist.
Überlegen Sie, bei welchen anderen Termen eine Faktorisierung „auf den ersten Blick“ möglich ist!

Lösung:
Da mit $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ natürlich auch $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ gilt, lassen sich die binomischen Formeln nicht nur zum Ausmultiplizieren, sondern auch zur Faktorisierung verwenden.
Somit gilt aufgrund der dritten binomischen Formel auch:

$$c^2-h^2 = (c+h)(c-h)\,.$$

3.) Wie lauten also die drei Gleichungen, die sich in den obigen Teilaufgaben als nützlich erwiesen haben? Ergänzen Sie!

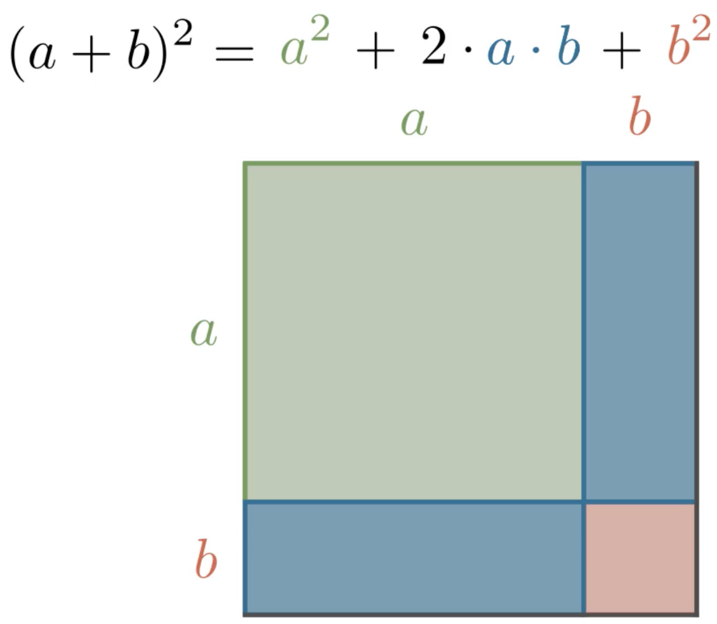
$(a+b)^2 = \boxed{\ ?\ }$
$(a-b)^2 = \boxed{\ ?\ }$
$(a+b)(a-b) = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:
Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

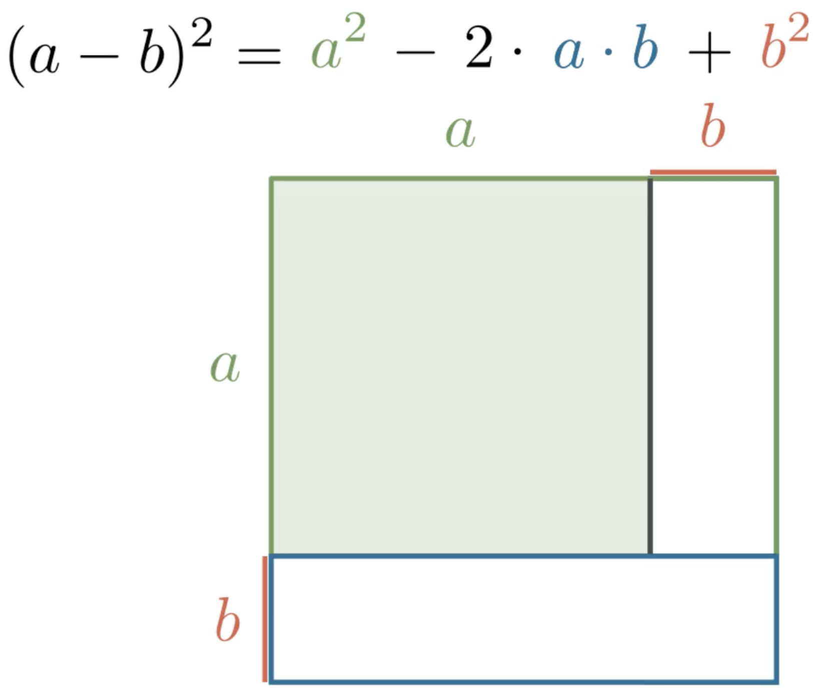
$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2a \cdot b + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2a \cdot b + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Bei der Eingabe ist zu beachten, dass die einzelnen Variablen a und b nur dann korrekt erkannt werden, wenn sie durch ein Rechensymbol (hier das Multiplikationszeichen) voneinander getrennt werden.

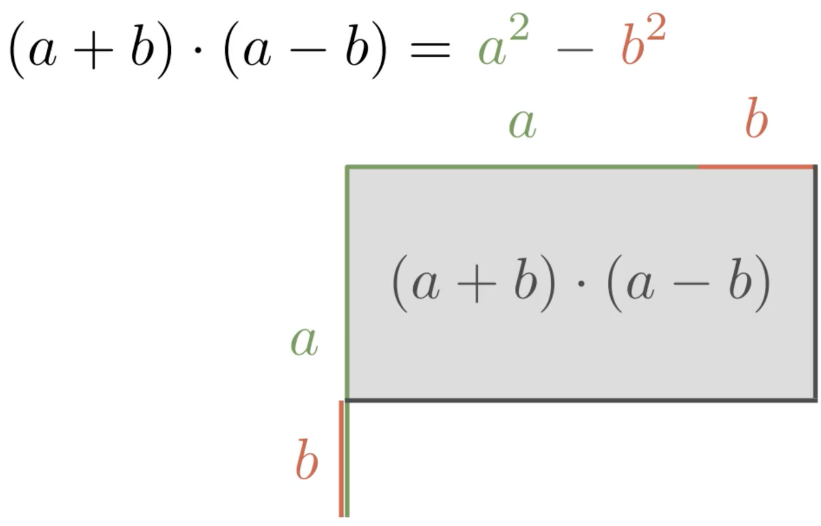
Der geometrische Weg



Video 1 *(nur in digitaler Version)* Die geometrische Herleitung der ersten binomischen Formel.



Video 2 *(nur in digitaler Version)* Die geometrische Herleitung der zweiten binomischen Formel.



Video 3 *(nur in digitaler Version)* Die geometrische Herleitung der dritten binomischen Formel.

Inhalte mit Erklärungen

Satz 1:
Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

Erste binomische Formel:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Zweite binomische Formel:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Dritte binomische Formel:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Alle Formeln lassen sich von links nach rechts lesen, aber auch von rechts nach links. Die Umformungsrichtung von links nach rechts nennt man **Ausmultiplizieren**, die Umformungsrichtung von rechts nach links **Faktorisieren**. Beide Anwendungen sind legitim und können bei Umformungen eingesetzt werden, um Zeit zu sparen. Die Variablen a und b können auch durch komplexere Terme ersetzt werden.

Algebraische Herleitung
Wir bestätigen die binomischen Formeln durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b \\
&= aa + ba + ab + bb \\
&= a^2 + 2ab + b^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = (a-b)a - (a-b)b \\
&= aa - ba - ab + bb \\
&= a^2 - 2ab + b^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= (a+b)a - (a+b)b \\
&= aa + ba - ab - bb \\
&= a^2 - b^2.
\end{aligned}$$

Aufgaben

Für die folgenden Aufgaben gilt, dass alle Variablen für reelle Zahlen stehen, wenn nichts anderes gesagt wird.

Aufgabe 2:
Kreuzen Sie die korrekten Gleichungen an. Korrigieren Sie gegebenenfalls.

- □ $(a-b)^2 = a^2 - b^2$
- □ $(r+s)^2 = r + 2rs + s$
- □ $(f-k)^2 = f^2 - k^2 + 2fk$
- □ $u^2 - v^2 = (v-u)(u+v)$
- □ $(o-c)^2 = o^2 - oc + c^2$
- □ $16 + 8a + a^2 = (4a)^2$
- □ $p^2 - p2q + q^2 = (p-q)^2$
- □ $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot 2ab \cdot b^2$
- □ $(w+i)(-i+w) = w^2 - i^2$
- □ $z^2 + j^2 + zj2 = (z+j)^2$
- □ $(8a^2 + 5b^2)^2 = 64a^2 + 80a^2b^2 + 25b^4$
- □ $(24h - 12b)^2 = 576h^2 - 48hb + 144b^2$
- □ $(c+d)^3 = c^3 + d^3$

Lösung:

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und nicht $a^2 - b^2$.
$(r+s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$ auch in diesem Fall war die Umformung falsch.
$(f-k)^2 = f^2 + k^2 - 2fk$ hier lag ein Vorzeichenfehler vor.
$u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$ und nicht $(v-u)(u+v)$.
$(o-c)^2 = o^2 - 2oc + c^2$ und nicht $o^2 - oc + c^2$.
$16 + 8a + a^2$ kann zu $(4+a)^2$ vereinfacht werden, die vorliegende Lösung ist hingegen falsch.
$p^2 - p2q + q^2 = p^2 - 2pq + q^2 = (p-q)^2$ ist korrekt.
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ Die oben angegebene Gleichung war also falsch.
$(w+i)(-i+w) = (w+i)(w-i) = w^2 - i^2$ ist richtig.
$z^2 + j^2 + zj2 = z^2 + 2jz + j^2 = (z+j)^2$ auch dies ist richtig.
$(8a^2 + 5b^2)^2 = 64a^4 + 80a^2b^2 + 25b^4$. Bei der vorliegenden Lösung wurde vergessen, a^2 zu a^4 zu quadrieren.
$(24h - 12b)^2 = 576h^2 - 576hb + 144b^2$. Es wurde oben also vergessen, im mittleren Term mit 12 zu multiplizieren.

$$\begin{aligned} (c+d)^3 &= (c+d)^2 \cdot (c+d) \\ &= (c^2 + 2cd + d^2)(c+d) \\ &= c^3 + c^2d + 2cd^2 + 2c^2d + d^2c + d^3 \\ &= c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3 \\ \text{und nicht } & \; c^3 + d^3 \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:
Veranschaulichen Sie die folgenden Terme geometrisch. Ordnen Sie auch die einzelnen Summanden (und Subtrahenden) in der ausmultiplizierten Form den jeweiligen Teilflächen zu!

- $(3a + 4b)^2$ für $a, b > 0$

Lösung:

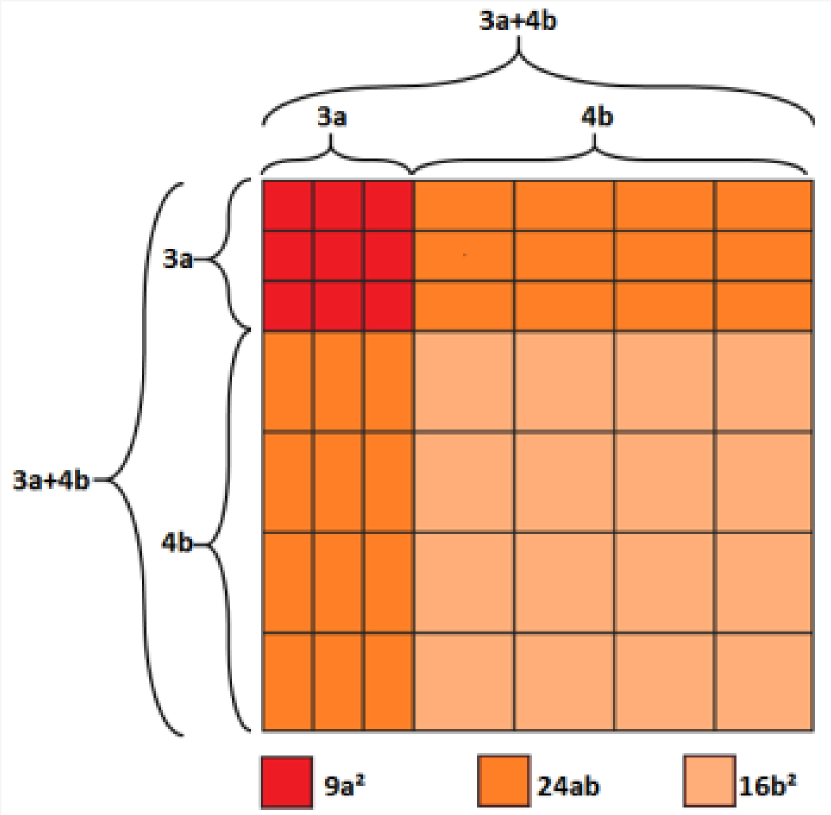


Bild 1 Geometrische Veranschaulichung von $(3a + 4b)^2$; mit der Annahme $b > a$

- $(4c - a)^2$ für $4c > a > 0$

Lösung:

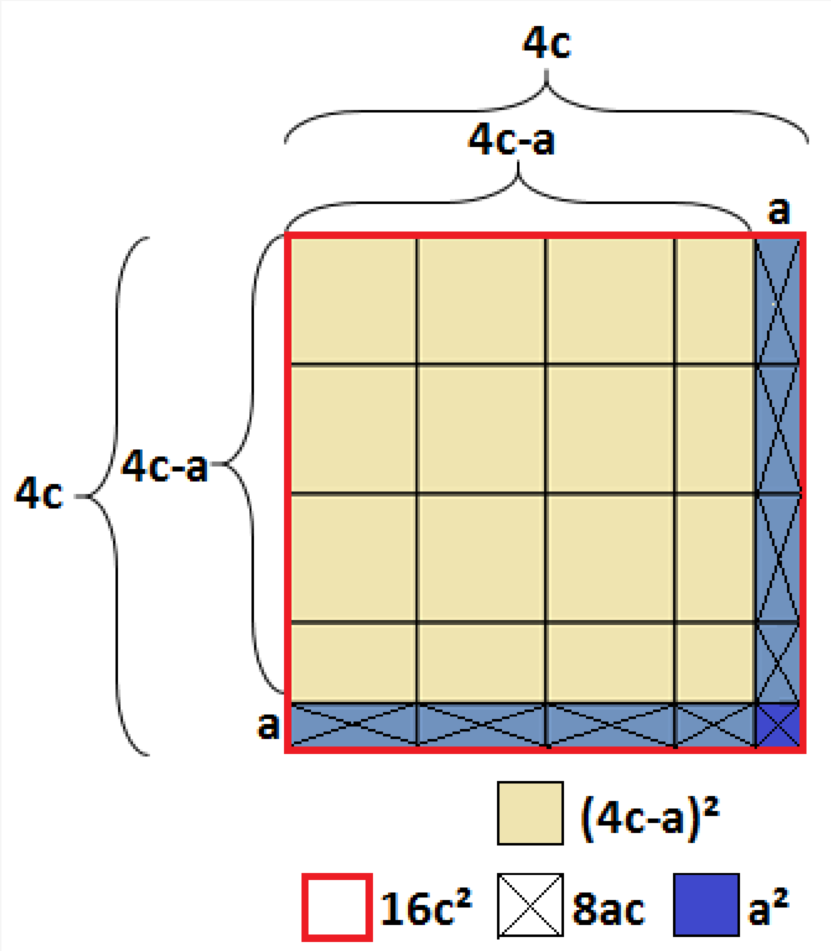


Bild 2 Geometrische Veranschaulichung von $(4c-a)^2$; mit der Annahme $c > a$

Aufgabe 4:
Vervollständigen Sie so, dass die sich ergebenden Gleichungen richtig sind!

- $(a-2b)^2 = \boxed{\ ?\ }\ -4ab+ \boxed{\ ?\ }\ b^2$

Lösung:
Mit der 2. Binomischen Formel ergibt sich:

$(a-2b)^2 = a^2 \ -4ab+ 4\ b^2$

- $(y- \boxed{\ ?\ }\ )^2 = y^2 \boxed{\ ?\ }\ +9z^2$

Lösung:
Mit der 2. Binomischen Formel ergibt sich:

$(y- 3z\ )^2 = y^2\ -6yz\ +9z^2$

- $(2 \square a)(2 \square a) = 4 \square a^2$
Hier existieren mehrere korrekte Lösungen. Wie lauten sie?

Lösung:

Mit der 3. Binomischen Formel ergibt sich:

$(2 + a)(2 - a) = 4 - a^2$
beziehungsweise
$(2 - a)(2 + a) = 4 - a^2$
Eine weitere richtige Lösung ist:
$(2 \cdot a)(2 \cdot a) = 4 \cdot a^2$

Aufgabe 5:
Ist die folgende Gleichung korrekt? Wenn nicht, suchen Sie ein Zahlenbeispiel, das diese Gleichung widerlegt!
$(a + b)^3 = a^3 + 3ab + b^3$.

Lösung:

Die Gleichung ist falsch.

Ein mögliches Gegenbeispiel erhält man, indem man für $a = 2$ und $b = 3$ einsetzt:
$(2+3)^3 = 5^3 = 125$ aber $2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3^3 = 8 + 18 + 27 = 53$ Weitere Gegenbeispiele findet man, indem man andere Zahlen für a und b einsetzt.

Die obige Gleichung müsste korrekt lauten:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)^2 \cdot (a+b) \\
&= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b) \\
&= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot a + (a^2 + 2ab + b^2) \cdot b \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}$$

Aufgabe 6:
Vereinfachen Sie:

$$(5a + 4)^2 - (3a - 5)^2 + 4(a + 3)(a - 3)\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
& (5a+4)^2 - (3a-5)^2 + 4(a+3)(a-3) \\
= \; & 25a^2 + 2 \cdot 5a \cdot 4 + 16 - (9a^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5 + 25) + 4(a^2 - 9) \\
= \; & 25a^2 + 40a + 16 - 9a^2 + 30a - 25 + 4a^2 - 36 \\
= \; & 20a^2 + 70a - 45
\end{aligned}$$

Aufgabe 7:
Wandeln Sie folgende Summen in Produkte um:

- $25 + 4z^2 + 20z$

Lösung:

$$\begin{aligned} 25 + 4z^2 + 20z &= (2z)^2 + 2 \cdot 2z \cdot 5 + 5^2 \\ &= (2z+5)^2 \end{aligned}$$

- $-x^4y^2 + 9y^2$

Lösung:

$$\begin{aligned} -x^4y^2 + 9y^2 &= (3y)^2 - (x^2y)^2 \\ &= (3y - x^2y)(3y + x^2y) \\ &= y^2 \cdot (3 - x^2)(3 + x^2) \end{aligned}$$

- $-4m^2b + 2m^3 + 2mb^2$

Lösung:

$$\begin{aligned} & -4m^2b + 2m^3 + 2mb^2 \\ =\; & 2m(m^2 - 2mb + b^2) \\ =\; & 2m(m-b)^2 \end{aligned}$$

Beispiel 1:
Mit den binomischen Formeln berechnet man:

$$1,001^2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} 1,001^2 &= \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^2 \\ &= 1 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1000} + \left(\frac{1}{1000}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{2}{1000} + \frac{1}{1000000} = 1 + 0,002 + 0,000001 \\ &= 1,002001\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 8:
Berechnen Sie auf ähnliche Weise:

$$0,998^2$$

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, wie die Zahl 0, 998 geschickt zerlegt werden kann.

$0,998^2 = \boxed{?}$

Lösung:

Zunächst teilen wir die Zahl geschickt in eine Summe auf:

$$0{,}998 = 1 - 0{,}002 = 1 - \frac{2}{1000}\,.$$

Dann rechnen wir:

$$\begin{aligned}
0{,}998^2 &= \left(1 - \frac{2}{1000}\right)^2 \\
&= 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{1000} + \left(\frac{2}{1000}\right)^2 \\
&= 1 - \frac{4}{1000} + \frac{4}{1\,000\,000} \\
&= 1 - 0{,}004 + 0{,}000004 \\
&= 0{,}996004
\end{aligned}$$

Aufgabe 9:
Berechnen Sie das exakte Ergebnis mit den binomischen Formeln:

$1{,}002^2 = \boxed{?}$

$0{,}999^2 = \boxed{?}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
1{,}002^2 &= (1 + 0{,}002)^2 \\
&= 1^2 + 2 \cdot 0{,}002 + 0{,}002^2 \\
&= 1 + 0{,}004 + 0{,}000004 \\
&= 1{,}004004 \\
0{,}999^2 &= (1 - 0{,}001)^2 \\
&= 1^2 - 2 \cdot 0{,}001 + 0{,}001^2 \\
&= 1 - 0{,}002 + 0{,}000001 \\
&= 0{,}998001
\end{aligned}$$

Aufgabe 10:
Auch mit der dritten binomischen Formel lassen sich scheinbar schwere Multiplikationen leicht im Kopf berechnen. Lösen Sie die folgenden Aufgaben im Kopf und schreiben Sie vorher auf, wie Sie die Rechnung modifizieren müssen, um die dritte binomische Formel anwenden zu können.

$71 \cdot 69 = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

$$\begin{aligned} 71 \cdot 69 &= (70+1) \cdot (70-1) \\ &= 4900 - 1 \\ &= 4899 \end{aligned}$$

$79 \cdot 81 = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

$$\begin{aligned} 79 \cdot 81 &= (80-1) \cdot (80+1) \\ &= 6400 - 1 \\ &= 6399 \end{aligned}$$

$48 \cdot 52 = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

$$\begin{aligned} 48 \cdot 52 &= (50-2) \cdot (50+2) \\ &= 2500 - 4 \\ &= 2496 \end{aligned}$$

$1001 \cdot 999 = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

$$\begin{aligned} 1001 \cdot 999 &= (1000+1) \cdot (1000-1) \\ &= 1000000 - 1 \\ &= 999999 \end{aligned}$$

$205 \cdot 195 = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

$$\begin{aligned} 205 \cdot 195 &= (200+5)(200-5) \\ &= 200^2 - 5^2 \\ &= 40000 - 25 \\ &= 39975 \end{aligned}$$

Aufgabe 11:
Berechnen Sie im Kopf

$44^2 - 43^2 = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

$$\begin{aligned} 44^2 - 43^2 &= (44-43) \cdot (44+43) \\ &= 1 \cdot 87 = 87 \end{aligned}$$

$1002^2 - 1001^2 = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

$$\begin{aligned} 1002^2 - 1001^2 &= (1002+1001) \cdot (1002-1001) \\ &= 2003 \cdot 1 = 2003 \end{aligned}$$

Aufgabe 12:
Suchen Sie bei den folgenden Umformungen nach den Fehlern und geben Sie mögliche Ursachen an.

$(3x+5y)^2 = 3x^2 + 30xy + 5y^2$

Lösung:
Falsches Potenzieren: Es wurde vergessen, die einzelnen Terme ($3x$ bzw. $5y$) komplett zu quadrieren.

Korrekt wäre:

$$\begin{aligned} (3x+5y)^2 &= (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 \\ &= 9x^2 + 30xy + 25y^2 \end{aligned}$$

$(1-m)(m+1) = m^2+1$

Lösung:

Vorzeichenfehler: Vor m^2 fehlt das Minuszeichen.

Korrekt wäre:

$$\begin{aligned}(1-m)(m+1) &= (1-m)(1+m)\\ &= 1^2-m^2\\ &= -m^2+1\end{aligned}$$

$(8z+9w)^2 = 64z^2+81w^2$

Lösung:

Missachtung der Termstruktur: Die Klammer wurde einfach aufgelöst und der Exponent auf die Summanden verteilt. Hier hätte die erste binomische Formel angewandt werden müssen.

Korrekt wäre:

$$\begin{aligned}(8z+9w)^2 &= (8z)^2+2\cdot 8z\cdot 9w+(9w)^2\\ &= 64z^2+144wz+81w^2\end{aligned}$$

$(2t-4)(9t+5) = 18t^2-46t-20$

Lösung:

Missachtung der Voraussetzungen: Bei diesem Beispiel ist die Anwendung einer binomischen Formel nicht möglich.

Korrekt wäre:

$$\begin{aligned}&(2t-4)(9t+5)\\ =\ &2t\cdot 9t+2t\cdot 5+(-4)\cdot 9t+(-4)\cdot 5\\ =\ &18t^2-26t-20\end{aligned}$$

$(9p-7s)(9p+7s) = 81p-49s$

Lösung:

Hier wurde vergessen, die Variablen p und s zu quadrieren.

Korrekt wäre: $(9p-7s)(9p+7s)^2 = (9p)^2-(7s)^2 = 81p^2-49s^2$.

$(-9-i)(6-i) = -i^2+3i+54$

Lösung:

Mehrere Fehler: Eine binomische Formel kann hier nicht angewandt werden, da hierzu die Voraussetzungen fehlen. Zudem wurden die binomischen Formeln falsch angewandt.

Korrekt wäre:

$$\begin{aligned}
& (-9-i)(6-i) \\
= \;& (-9)\cdot 6 + (-9)\cdot(-i) + (-i)\cdot 6 + (-i)\cdot(-i) \\
= \;& -54 + 9i - 6i + i^2 \\
= \;& i^2 + 3i - 54
\end{aligned}$$

$(-d+e)^2 = -d^2 - 2de + e^2$

Lösung:

Vorzeichenfehler: Das Minuszeichen vor d^2 ist falsch, da $(-d)^2 = d^2$. Es wurde also falsch quadriert.

Korrekt wäre:

$$\begin{aligned}
(-d+e)^2 &= (-d)^2 + 2\cdot(-d)\cdot e + (e)^2 \\
&= d^2 - 2de + e^2
\end{aligned}$$

Anwendung

Aufgabe 13:
(Plattenleger - Problem)
Ein Plattenleger macht eine interessante Entdeckung: Jedes Mal, wenn er eine quadratische Fläche auslegen soll, bei der an jeder Seite eine ungerade Anzahl Platten liegt, bleibt ausgerechnet stets genau ein Feld frei, wenn er die Kacheln bei seinem Händler in der 8er - Packung kauft.
Finden Sie eine Erklärung für dieses Phänomen!

Lösung:

Alle ungeraden Zahlen lassen sich durch den Term $2n-1$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellen. Damit ist die Anzahl der zu verlegenden Platten bei einer quadratischen Fläche mit ungerader Plattenzahl an jeder Seite genau $(2n-1)^2$.
Mit Hilfe der binomischen Formel ergibt sich hieraus: $(2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$. Da allerdings $4n^2 - 4n = 4n(n-1)$ ist, wird für alle $n \in \mathbb{N}$ der Faktor 4 hier stets mit einer geraden Zahl multipliziert, da ja entweder n oder $n-1$ gerade ist. Das Produkt aus 4 und einer geraden Zahl ergibt jedoch stets ein Vielfaches von 8, sodass auch $4n^2 - 4n$ stets ein Vielfaches von 8 ist.
Da der Plattenleger jedoch stets $4n^2 - 4n + \mathbf{1}$ Platten braucht, hat er immer eine Platte zu wenig bzw. 7 zu viel gekauft!

Verkürztes Ausmultiplizieren

Aufgabe 14:
Multiplizieren Sie folgenden quadratischen Ausdruck aus:

$$\left(-3x^2 + 7a\right)^2 .$$

Man erhält: ?

Lösung:

$$\begin{aligned} & \left(-3x^2 + 7a\right)^2 \\ = \; & \left(-3x^2\right)^2 + 2\left(-3x^2\right)(7a) + (7a)^2 \\ = \; & 9x^4 - 42a\,x^2 + 49a^2 \end{aligned}$$

Die obigen Gleichungen suggerieren, dass die binomischen Formeln uns nur einige Rechenschritte ersparen. Aber sie helfen unter anderem auch beim Quadrieren bestimmter Zahlen.

Faktorisierung
Die eigentliche Stärke der binomischen Formeln tritt erst zutage, wenn man sie „rückwärts“ anwendet. Betrachten wir hierzu folgendes Beispiel.

Beispiel 2:

Vereinfachen Sie folgenden Term:

$$\frac{9x^2 - 12x + 4}{6x - 4}\,.$$

Dabei darf der Nenner nicht den Wert Null annehmen, also muss $x \neq \frac{2}{3}$ sein.

Kürzen ist zunächst nicht möglich und eine Polynomdivision wäre aufwändig. Einen schnelleren Lösungsweg bietet hier die Anwendung einer binomischen Formel. Der Term im Zähler kann als $(3x-2)^2$ geschrieben werden:

$$\frac{9x^2 - 12x + 4}{6x - 4} = \frac{(3x-2)^2}{6x-4}$$

Zusätzlich kann man im Nenner den Faktor 2 ausklammern, sodass dort ebenfalls der Term $3x - 2$ steht:

$$\frac{(3x-2)^2}{6x-4} = \frac{(3x-2)^2}{2(3x-2)}$$

Nun kann man den Term $3x - 2$ aus Zähler und Nenner herauskürzen und erhält:

$$\frac{(3x-2)^2}{2(3x-2)} = \frac{3x-2}{2}$$

Diesen Bruch kann man auch umschreiben, sodass das Ergebnis übersichtlicher wird:

$$\frac{3x-2}{2} = \frac{3}{2}x - 1$$

Mit Hilfe der zweiten binomischen Formel wurde also der Bruch $\frac{9x^2-12x+4}{6x-4}$ zu $\frac{3}{2}x - 1$ vereinfacht. Zu beachten ist hier, dass der Wert $x = \frac{2}{3}$ nach wie vor ausgeschlossen ist, da der Bruch sonst nicht definiert ist (da der Nenner sonst den Wert Null annimmt).

Aufgabe 15:

Vereinfachen Sie durch Faktorisieren und Kürzen für $d \in \mathbb{R}$:

$\frac{9+12d^2+4d^4}{3+2d^2} = \boxed{?}$

Lösung:

Der Term im Zähler lässt sich wegen

$$\begin{aligned}(3+2d^2)^2 &= 3^2 + 2\cdot 3\cdot(2d^2) + (2d^2)^2\\ &= 9 + 12d^2 + 4d^4\end{aligned}$$

faktorisieren:

$$\frac{9+12d^2+4d^4}{3+2d^2} = \frac{(3+2d^2)^2}{3+2d^2}$$

Jetzt kann man kürzen und erhält:

$$\frac{(3+2d^2)^2}{3+2d^2} = \frac{3+2d^2}{1} = 3 + 2d^2$$

Aufgabe 16:
Vereinfachen Sie durch Faktorisieren und Kürzen:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab}\,.$$

Überlegen Sie zunächst, für welche a und b der Nenner Null ist. Welche Werte für a und b müssen also ausgeschlossen werden?

Lösung:

Der Nenner des Terms darf nicht Null werden. Wegen $a^2 - ab = a(a - b)$ müssen die beiden Fälle $a = 0$ und $a = b$ ausgeschlossen werden.
Dann ergibt sich:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab} = \frac{(a - b)(a + b)}{a(a - b)} = \frac{a + b}{a} = 1 + \frac{b}{a}\,.$$

Aufgabe 17:
Fassen Sie folgende Summe von Brüchen zu einem Bruch zusammen:

$$\frac{a}{a + b} + \frac{b}{a - b} + \frac{2ab}{b^2 - a^2}.$$

Welche Werte von a und b müssen ausgeschlossen werden?

Lösung:

Ausgeschlossen werden muss eine Null im Nenner. Demnach muss $a + b \neq 0$ und somit $a \neq -b$ gelten. Des Weiteren muss auch $a - b \neq 0$ sein, sodass auch $a \neq b$ vorausgesetzt werden muss. Der Nenner des dritten Terms führt zu keinen weiteren Ausnahmen, da $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ gilt und dieses Produkt nur dann Null wird, wenn einer der beiden bereits betrachteten Fälle eintritt. Somit muss insgesamt nur $a = -b$ und $a = b$ ausgeschlossen werden.

Beim Zusammenfassen ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{2ab}{b^2-a^2} \\
= & \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{b(a+b)}{(a-b)(a+b)} + \frac{2ab}{(b^2-a^2)} \\
= & \frac{a(a-b)}{a^2-b^2} + \frac{b(a+b)}{a^2-b^2} + \frac{2ab(-1)}{(b^2-a^2)(-1)} \\
= & \frac{a^2-ab}{a^2-b^2} + \frac{ba+b^2}{a^2-b^2} - \frac{2ab}{a^2-b^2} \\
= & \frac{a^2-ab+ba+b^2-2ab}{a^2-b^2} \\
= & \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2} \\
= & \frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)} \\
= & \frac{a-b}{a+b}
\end{aligned}$$

Hinweis: Beim Lösen von quadratischen Gleichungen spielen abermals die binomischen Formeln in rückwärtiger Anwendung eine wichtige Rolle.

Ergänzungen

Aufgabe 18:
Das untere Bild zeigt eine dreidimensionale Darstellung einer anderen Formel.
a) Finden Sie eine Gleichung, die durch dieses Bild dargestellt werden kann.
b) Können Sie die einzelnen Summanden in der ausmultiplizierten Form den einzelnen Teilen zuordnen?

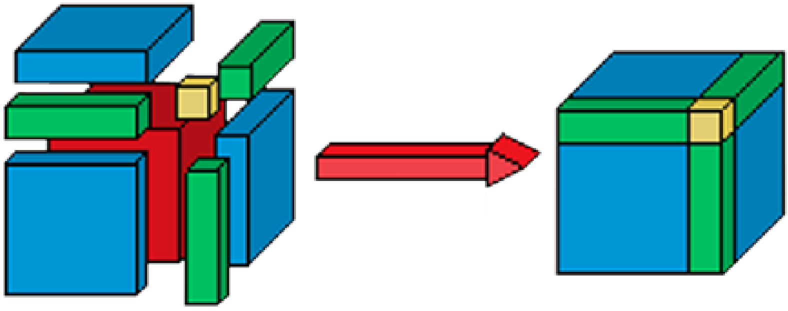


Bild 3

Lösung:

zu a.)

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2b + 3 \cdot ab^2 + b^3$$

zu b.) Wenn a das längere Seitenstück und b das kürzere ist, dann entspricht

- a^3 dem roten inneren Würfel,
- a^2b den drei blauen Quadern,
- ab^2 den drei grünen Quadern und
- b^3 dem gelben Würfel.

Wenn b das längere und a das kürzere Seitenstück ist, dann entsprechend andersherum.

Aufgabe 19:
Pascalsches Dreieck und die binomischen Formeln

- Multiplizieren Sie folgende Terme aus: $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ und $(a+b)^6$. Können Sie einen Zusammenhang mit dem Pascal'schen Dreieck erkennen?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Bild 4 Das Pascal'sche Dreieck. Eine Zeile entsteht indem Sie jeweils zwei Zahlen in der vorherigen Zeile addieren und die Zahlen 1 am Rand ergänzen.

Lösung:

Es ergibt sich sortiert

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\\
(a+b)^6 &= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6
\end{aligned}
$$

Zusammenhang zum Pascalschen Dreieck: Schreibt man die einzelnen Summanden wie hier geschehen mit absteigenden Potenzen von a auf, so lassen sich die Zahlen vor den Variablen (die so genannten „Koeffizienten") direkt aus dem Pascalschen Dreieck ablesen: Die Koeffizienten für $(a+b)^5$ lassen sich beispielsweise in der sechsten Zeile finden. Außerdem beträgt in der ausmultiplizierten Form von $(a+b)^n$ die Summe der Exponenten von a und b bei den einzelnen Summanden stets n.

- Geben Sie für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ ein System zur Entwicklung der ausmultiplizierten Form von $(a+b)^n$ an und wenden Sie es auf den Term $(a+b)^8$ an (ohne zu rechnen)!

Lösung:

Man schreibt die a - Potenzen absteigend und die b - Potenzen aufsteigend, sodass die Summe der Exponenten von a und b bei den einzelnen Summanden stets n ergibt. Die Koeffizienten für $(a+b)^n$ lassen sich in der **n + 1** Zeile des Pascalschen Dreieck finden.
Für $(a+b)^8$ ergibt sich analog aus der neunten Zeile:

$$\begin{aligned}(a+b)^8 &= a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4\\ &\quad +56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8\,.\end{aligned}$$

- Multiplizieren Sie auch $(a+b)^9$ aus.

Lösung:

Für $(a+b)^9$ benötigt man zunächst die 10. Zeile des Pascal'schen Dreiecks. Betrachtet man die einzelnen Zahlen im Dreieck noch einmal genauer, so stellt man fest, dass sich diese stets durch Addition der beiden darüber stehenden Zahlen berechnen lassen.

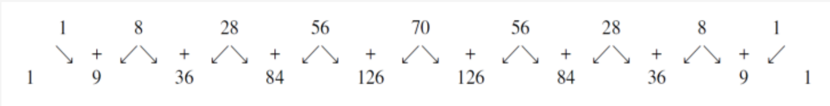


Bild 5

Insgesamt folgt damit:

$$\begin{aligned}(a+b)^9 &= a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3+126a^5b^4\\ &\quad +126a^4b^5+84a^3b^6+36a^2b^7+9ab^8+b^9\end{aligned}$$

- In ganz ähnlicher Weise kann man Terme der Form $(a-b)^n$ betrachten. Bestimmen Sie für kleine $n \in \mathbb{N}$ die ausmultiplizierte Form. Was fällt Ihnen auf?
  Können Sie wieder ein System für die Entwicklung der ausmultiplizierten Form angeben?

Lösung:

Analoges gilt für $(a-b)^n$, nur muss hier zusätzlich auf die Vorzeichen geachtet werden:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\ (a-b)^4 &= a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4\\ (a-b)^5 &= a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5\end{aligned}$$

Offensichtlich lassen sich auch hier die Koeffizienten aus dem Pascal'schen Dreieck ablesen, nur ist der erste Summand stets positiv, der zweite stets negativ, der dritte wieder positiv usw.